Definizione di funzione continua

Continuità in un punto

Sia (a,b) un intervallo e sia $f:(a,b)\to I\!R$. Sia infine $x_0 \in]a,b[$. Diciamo che f **è continua in** x_0 se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Continuità a destra in un punto

Sia $[a,b)$ un intervallo e sia $f:[a,b)\to I\!R$. Sia infine $x_0 \in [a,b[$. Diciamo che f **è continua a destra in** x_0 se

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0)$$

Continuità a sinistra in un punto

Sia $(a,b]$ un intervallo e sia $f:(a,b]\to I\!R$. Sia infine $x_0 \in]a,b]$. Diciamo che f **è continua a sinistra in** x_0 se

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0)$$

Continuità in un intervallo aperto

Sia $]a,b[$ un intervallo aperto e sia $f:]a,b[\to I\!R$. Diciamo che f **è continua in** $]a,b[$ se

$$\forall x_0 \in \,]a,b[\qquad f \text{ è continua in } x_0$$

Continuità in un intervallo chiuso

Sia $[a,b]$ un intervallo chiuso e sia $f:[a,b]\to I\!R$. Diciamo che f **è continua in** $[a,b]$ se

$$f \text{ è continua in }]a,b[\quad e \ f \text{ è continua a destra in } a \quad e \ f \text{ è continua a sinistra in } b$$

Lo spazio $C^0([a,b])$

Sia $[a,b]$ un intervallo chiuso. L'insieme di tutte le funzioni f continue su $[a,b]$ viene denotato con $C^0([a,b])$. Introducendo le usuali operazioni di somma di funzioni e prodotto di una funzione per un numero reale:

$$\forall f,g \in C^0([a,b]) \quad \forall x \in [a,b] \qquad (f+g)(x) := f(x)+g(x)$$

$$\forall f \in C^0([a,b]) \quad \forall \lambda \in I\!R \quad \forall x \in [a,b] \qquad (\lambda f)(x) := \lambda f(x)$$

l'insieme $C^0([a,b])$ diventa uno spazio vettoriale su $I\!R$

N.B. Potrebbe capitarvi di incontrare qualcuno che sa la matematica. Costui potrebbe dirvi che in realtà i matematici seri chiamano $C^0([a,b])$ l'insieme delle restrizioni ad $]a,b[$ delle funzioni continue in $[a,b]$. Avrebbe ragione. Ma voi invitatelo ugualmente a .... !